iscac Politecnico de Coimbra **COIMBRA BUSINESS SCHOOL** 100 ANOS since 1921

Prova Específica de Matemática especialmente adequada para acesso e ingresso no ensino superior dos maiores de 23 anos - 2023/2024

Data: 10 de Maio 2023. **Duração: 1h30m**

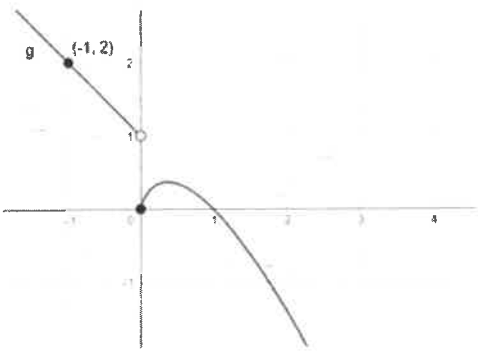
Nome:

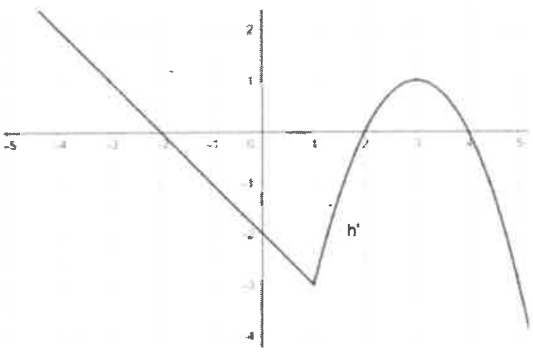
Grelha de resposta à questão 1:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)

1. Esta questão é de escolha múltipla. Para cada uma das alíneas, assinale a opção correcta na grelha de resposta acima.

   Considere as funções reais de variável real f, g e h', tais que $f(x) = ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$ e g e h' são as funções representadas no referencial cartesiano abaixo, sendo que h' é a função derivada de h.





(a) i. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $D_g = \mathbb{R}$.
   ii. $D_f =]-\infty; 1[$ e $D_g = \mathbb{R}$.
   iii. $D_f =]1, +\infty[$ e $D_g = \mathbb{R}$.
   iv. Nenhuma das anteriores.

(b) i. $CD_g = \mathbb{R}$.
ii. $CD_g = D_g$.
iii. $CD_g =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
iv. Nenhuma das anteriores.

(c) i. $(0,2) \in graf_f$ e 0 é zero de g.
ii. $(0,2) \in graf_f$ e e $(1,0) \in graf_g$.
iii. $(2,0) \in graf_f$ e $(0,0) \in graf_g$.
iv. Nenhuma das anteriores.

(d) i. g é uma função injectiva e invertível.
ii. g não é injectiva mas é invertível.
iii. g não é invertível mas é injectiva.
iv. Nenhuma das anteriores.

(e) i. g é contínua e diferenciável em $x = 0$.
ii. g não é contínua mas é diferenciável em $x = 0$.
iii. g não é contínua em $x = 0$ e $\lim_{x \longrightarrow 0^+} g(x) = 0$.
iv. Nenhuma das anteriores.

(f) i. $(h' \circ g)(-1) = 2$.
ii. $(h' \circ g)(-1) = (g \circ h')(-1)$.
iii. $(h' \circ g)(-1) = (g \circ h')(4)$.
iv. Nenhuma das anteriores.

(g) i. h é crescente para $x \in]1,3[$ e $h(1)$ é mínimo local de h.
ii. h é decrescente para $x \in]1,2[$ e $h(2)$ é máximo local de h.
iii. h é decrescente para $x \in]1,2[$ e $h(2)$ é mínimo local de h.
iv. Nenhuma das anteriores.

(h) i. $g'(-1) = g'(0)$.
ii. $g'(-1) > g(-1)$.
iii. Para todo $x < 0$, $g'(x) = -1$.
iv. Nenhuma das anteriores.

Responda às questões que se seguem, justificando convenientemente as suas respostas e apresentando todos os cálculos que tiver que efectuar.

2. Considere a função real de variável real $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ (x^2 - x)e^x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

   (a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.

   (b) Averigue se $f'(0) = -1$.

   (c) Determine, se possível, a equação reuzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa zero.

3. Considere a função real de variável real $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{4x}$.

   (a) Caracterize a função derivada de f, determinando o seu domínio e a sua expressão designatória.

   (b) Estude a função f quanto à monotonia e existência de extremos locais.

Questões:	1	2(a)	2(b)	2(c)	3(a)	3(b)
20 valores	1,0/resposta correcta	2,5	2,5	1,5	2,5	3,0

ISCAC

Prova Específica de Matemática

Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h30m

Data: 8 de julho de 2020

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
- Cotações:

Questões	**1(a)**	**1(b)**	**1(c)**	**2(a)**	**2(b)**	**2(c)**	**3(a)**	**3(b)**
20 valores	2.00	2.50	2.50	1.75	3.00	2.50	2.75	3.00

---

1. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x + ax + a & \text{se} \quad x < 0 \\ \ln(x+1) + a + 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

   (a) Mostre que a função f é contínua em $x = 0$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

   Nas duas alíneas seguintes considere $a = 0$.

   (b) Calule, caso exista, $f'(0)$.

   (c) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = e - 1$.

2. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \ln(e^{2x} - \frac{1}{2})$.

   (a) Determine o domínio da função g.

   (b) Mostre que a função g não possui pontos de inflexão.

   (c) Sendo g uma função injetiva, caraterize a sua função inversa g^{-1}.

3. Um medicamento foi administrado a uma pessoa às $10h$ da manhã de um determinado dia.

   A concentração desse medicamento, em miligramas por litro de sangue, t horas após ter sido administrado, é dada, para determinado valor de K, por $C(t) = 10\left(e^{-Kt} - e^{-0.4t}\right)$, $t \geq 0$.

   (a) Sabendo que $2e^{-0.4t} - 0.2C(t) = C'(t)$, mostre que $K = 0.2$.

   (b) Assumindo $K = 0.2$, determine o valor de t para o qual é máxima a concentração do medicamento no sangue da pessoa.

Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Coimbra

FORMULÁRIO de MATEMÁTICA

- **Funções exponenciais e logarítmicas** (no domínio de cada uma das funções)

Propriedades: $a, b \in \mathbb{R}^+$

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $a^x b^x = (ab)^x$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^x = e^{x\log(a)}$

Propriedades: $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $y\log_a(x) = \log_a(x^y)$
- $\log_a(x) = \dfrac{1}{\log(a)} \cdot \log(x)$
- $a^{\log_a(x)} = x$
- $\log_a(a^x) = x$

- **Funções trigonométricas**

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$n.d.$
$\operatorname{cotg}(\alpha)$	$n.d.$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- **Fórmulas trigonométricas**

1) $\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

2) $\operatorname{cotg}(\alpha) = \dfrac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}$

3) $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

4) $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$

5) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$

6) $\operatorname{sen}^2(\alpha) = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

7) $\cos^2(\alpha) = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

- **Regras de derivação:** Sejam u e v funções reais de uma mesma variável real.

1) $(c)' = 0\ ,\ c \in \mathbb{R}$

2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

3) $(cv)' = cv'\ ,\ c \in \mathbb{R}$

4) $(uv)' = u'v + v'u$

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

6) $(u^p)' = pu^{p-1}u'\ ,\ p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

7) $(e^u)' = e^u u'$

8) $(a^u)' = a^u u' \log(a)\ ,\ a \in \mathbb{R}^+$

9) $(\log(u))' = \dfrac{u'}{u}$

10) $(\log_b(u))' = \dfrac{u'}{u} \cdot \dfrac{1}{\log(b)}\ ,\ b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

11) $(\operatorname{sen}(u))' = \cos(u)\, u'$

12) $(\cos(u))' = -\operatorname{sen}(u)\, u'$

13) $(\operatorname{tg}(u))' = \sec^2(u)\, u'$

14) $(\operatorname{cotg}(u))' = -\operatorname{cosec}^2(u)\, u'$

ISCAC

Prova Específica de Matemática

Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h30m

Data: 13 de Maio de 2019

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.
- Cotações:

Questões	1(a)	1(b)	1(c)	2	3(a)	3(b)	3(c)	4
20 valores	2.00	2.50	2.00	2.50	1.00	3.50	3.50	3.00

---

1. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 4}{x^2 - 4}$.

   (a) Determine o domínio de f.

   (b) Determine as coordenadas dos pontos de intersecção da representação gráfica de f com os eixos coordenados.

   (c) Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Seja $f(x) = -4x + sin(\pi x)$. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

3. De uma função f, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabemos que $f'(x) = \dfrac{ln(x) - 1}{x}$, com $x \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Calcule a variação instantânea de f quando $x = 1$.

   (b) Determine os intervalos de monotonia e os extremantes de f.

   (c) Determine as abcissas dos pontos de inflexão e o sentido das concavidades de f.

4. Os custos fixos de uma empresa são 2000€. O custo de produção unitário de um bem é 20€. Se o preço de venda unitário desse bem for 75€, quantas unidades deverão ser produzidas e vendidas para a empresa obter 14500€ de lucro.

Prova Específica de Matemática

Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior de Candidatos Maiores de 23 Anos

ISCAC

Duração: 1h30m **Data:** 17 de Maio de 2018

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.

- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

- Cotações:

Questões	1(a)	1(b)	1(c)	2(a)	2(b)	2(c)	3
20 valores	3.00	2.00	3.00	2.00	3.00	3.00	4.00

---

1. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(kx)}{kx} & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

   (a) Calcule, caso exista, $\lim_{x \to 0} f(x)$.

   (b) Indique, justificando, o valor de k para o qual a função f é contínua em $\mathbb{R}$.

   (c) Para o valor de k encontrado na alínea anterior, determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = \pi$.

2. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \ln(x^2) + \dfrac{1}{x}$.

   (a) Calcule o domínio da função g.

   (b) Determine os extremos locais e os intervalos de monotonia de g.

   (c) Estude o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão de g.

3. Uma empresa encontra-se a testar um fungicida que pretende lançar no mercado.

   Sob a ação deste produto, a área (em m^2) ocupada por uma colónia de fungos, t dias após a sua aplicação, é dada por:

$$a(t) = 60 - t^2\, e^{-0.1t}, \quad \text{com } t \geq 0.$$

   Ao fim de quantos dias a área ocupada pela colónia de fungos é mínima?

Prova Específica de Matemática

Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior de Candidatos Maiores de 23 Anos

ISCAC

Duração: 1h30m

Data: 15 de Junho de 2018

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.
- Cotações:

Questões	1(a)	1(b)	2(a)	2(b)	3(a)	3(b)	3(c)	3(d)
20 valores	2.00	2.00	3.00	3.00	1.50	3.00	2.50	3.00

---

1. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{se } x > 0 \\ x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

(a) Mostre que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

(b) Indique, justificando devidamente, o domínio de continuidade de f.

2. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

(a) Determine a equação reduzida da reta tangente à representação gráfica de g no ponto de abcissa $x = 0$.

(b) Averigúe a existência de pontos de inflexão de g.

3. Numa empresa a relação entre os lucros trimestrais $L(x)$ e o investimento x em publicidade é dada por

$$L(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 7x + 30, \; 0 \leq x \leq 60$$

com x e $L(x)$ em milhares de euros.

(a) Diga se a empresa terá lucro, e qual, se não investir em publicidade.

(b) Diga quanto se deve investir em publicidade para que o lucro seja máximo e indique o seu valor máximo.

(c) Diga, justificando, se algum outro valor investido em publicidade origina o mesmo lucro quem em (a).

(d) Esboce o gráfico da função $L(x)$, indicando no mesmo as respostas de (a) e (b).

Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Coimbra

Prova Específica de Matemática
Destinada a Avaliar a Capacidade para a Frequência do Ensino Superior dos Maiores de 23 Anos

Duração: 2h **6 de Maio de 2011 - 18h**

Importante: Justifique todas as respostas, só assim poderá obter a classificação máxima.

QUESTÕES

1. Simplifique a seguinte expressão: $2\sqrt{64} - 2\sqrt{12} + \sqrt[3]{\frac{21\times 7^{-1}}{3\times 2^6}}$

2. Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes equações e inequações:

   a. $-1 = \frac{-3}{2} + \frac{1}{3x}$;

   b. $0 \geq -3x^2 - 3x + 18$;

   c. $|2 - x| > 1$.

3. Considere a função h, real de variável real, definida por: $h(x)=|2-x|$.
   a. Esboce o gráfico de h.
   b. Mostre que a função h atinge um mínimo em $x=2$.
   c. Resolva em IR a equação $h(x)=3$. Justifique que h não é uma função injectiva.

4. Considere a função f, real de variável real, definida por: $f(x) = 1 + 2e^{x-1}$.
   a. Determine o domínio e o contradomínio da função f.
   b. Resolva em IR a equação $f(x)=3$.
   c. Estude as concavidades da representação gráfica de f.

5. Considere a função g, real de variável real, definida por: $g(x) = log_e(3x - e^3) - 3$.

   a. Determine o domínio e o contradomínio da função g.
   b. Calcule, caso existam, os zeros de g.

   c. Mostre que a função g é contínua em $x=\frac{2e^3}{3}$.

   d. Calcule, caso exista, o valor de $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$.

6. Calcule, caso existam, cada um dos seguintes limites:

a. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2-4x}{x^2-2x+1}\right)$; b. $\lim_{x\to0}\left(\frac{3x^2-3x}{x}\right)$.

7. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{3n^2-3n}{n}$, com $n \in$ IN.

a. Mostre que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ e conclua sobre a convergência de (u_n).

b. Averigue se é limitada a sucessão de termo geral $v_n = cos\left(\frac{3n^2-3n}{n}\right)$, com $n \in$ IN.

FORMULÁRIO

Funções exponenciais e logarítmicas

Propriedades: $a,b \in IR^+$

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $a^x b^x = (ab)^x$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
- $a^x = e^{x\log(a)}$

Propriedades: $a \in IR^+\backslash\{1\}$

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $a^{\log_a(x)} = x$
- $y\log_a(x) = \log_a(x^y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(a^x) = x$
- $\log_a(x) = \frac{1}{\log(a)}\cdot\log(x)$

Regras de derivação: $u = f(x)$; $v = g(x)$

- $(c)' = 0$, $c \in \mathbb{R}$
- $(\mathrm{sen}(u))' = \cos(u)u'$
- $(cv)' = cv'$, $c \in \mathbb{R}$
- $(\cos(u))' = -\mathrm{sen}(u)u'$
- $(mx+b)' = m$, $m, b \in \mathbb{R}$
- $(\mathrm{tg}(u))' = \sec^2(u)u'$
- $(x^p)' = px^{p-1}$, $p \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$
- $(\mathrm{cotg}(u))' = -\mathrm{cosec}^2(u)u'$
- $(u^p)' = pu^{p-1}u'$, $p \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$
- $(\mathrm{arcsen}(u))' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(\arccos(u))' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
- $(uv)' = u'v + v'u$
- $(\mathrm{arctg}(u))' = \frac{1}{1+u^2}u'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
- $(\mathrm{arccotg}(u))' = -\frac{1}{1+u^2}u'$
- $(e^u)' = e^u u'$
- $(\mathrm{cosec}(u))' = -\mathrm{cosec}(u)\mathrm{cotg}(u)u'$
- $(a^u)' = a^u u' \log(a)$, $a \in \mathbb{R}^+$
- $(\sec(u))' = \sec(u)\mathrm{tg}(u)u'$
- $(\log_e(u))' = \frac{u'}{u}$
- $(\log_b(u))' = \frac{u'}{u}\cdot\frac{1}{\log(b)}$, $b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

- Derivada da função composta: Se g é diferenciável em a e f é diferenciável em $g(a)$, então: $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))\cdot g'(a)$.

- Derivada da função inversa: Seja f invertível. Se f é diferenciável em a e $f'(a) \neq 0$, então: f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$ e $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Instituto superior de Contabilidade e Administração de Coimbra

Prova Específica de Matemática

Destinada a Avaliar a Capacidade para a Frequência do Ensino Superior dos Maiores de 23 Anos

7 de Maio de 2012 Início: 18h (Duração: 2h)

<u>Importante:</u> Justifique todas as respostas, só assim poderá obter a classificação completa.

------------------------------ QUESTÕES ------------------------------

1. Simplifique a seguinte expressão: $\sqrt[5]{-\left(\frac{5^{-1}\times 25}{5:2^5}\right)^{-2}} + 2\sqrt{32} - 2\sqrt{16}.$

2. Determine, em IR, o conjunto solução de cada uma das seguintes equações e inequações:

   a. $-2 = -\frac{6}{2} + \frac{2}{3x}$; b. $0 \geq -x^2 - x + 6$; c. $|3 - x| < 1$.

3. Considere a função h, real de variável real, definida por: $h(x) = |3 - x|$.
   a. Mostre que o gráfico de h atinge um mínimo em $x=3$.
   b. Resolva em IR a equação $h(x)=1$. Justifique que h não é uma função injectiva.
   c. Esboce a representação gráfica de h.

4. Considere a função f, real de variável real, definida por: $f(x) = 2e^{x-2} + 2$.
   a. Determine o domínio e o contradomínio da função f.
   b. Resolva em IR a equação $f(x)=4$.
   c. Estude a função quanto ao sentido das concavidades e esboce a sua representação gráfica.

5. Considere a função g, real de variável real, definida por: $g(x) = \log_e(2x - e^2) - 2$.
   a. Determine o domínio e o contradomínio da função g.
   b. Calcule, caso existam, os zeros de g.
   c. Mostre que a função g é contínua em $x=e^2$.
   d. Calcule, caso exista, o valor de $\lim_{x\to-\infty} g'(x)$.

6. Calcule, caso existam, os seguintes limites:
   a. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-2x}{x^2-2x+1}$;
   b. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{\frac{2}{3}x}$;
   c. $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} cos(2x)$.

Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Coimbra

Prova Específica de Matemática

Avaliação de Capacidade para a Frequência do Ensino Superior de Candidatos

Maiores de 23 Anos

16 de maio de 2014

Duração: 1h:45m

1 Efetue o cálculo da seguinte expressão: $\frac{2^5}{2^2}-\frac{3^2(3+\frac{1}{3})}{2}+10\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}\right)$.

2 Simplifique as seguintes expressões:

2.1 $7\sqrt{20}+6\sqrt{45}$.

2.2 $\ln\frac{\sqrt{x^5}}{y^3}$.

3 Encontre o conjunto solução da inequação $|x+1|\leq 3$.

4 Simplifique a seguinte expressão $\frac{x^2-4x+4}{2x-4}$.

5 Seja a função $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$.

5.1 Indique o domínio de $f(x)$.

5.2 Estude a paridade da função $f(x)$.

5.3 A função $f(x)$ é injetiva? Justifique.

5.4 Obtenha a primeira derivada de $f(x)$.

5.5 Estude a monotonia de $f(x)$.

5.6 Indique, caso existam, os extremos da função $f(x)$.

6 Seja a função $f(x)=\begin{cases} xe^{-x} \Leftarrow x<0 \\ 2 \Leftarrow x=0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x+2} \Leftarrow x>0 \end{cases}$.

6.1 Calcule, caso exista, $\lim_{x\to 0} f(x)$.

6.2 Averigúe se a função $f(x)$ é contínua no ponto $x=0$.

7 Considere a sucessão $U_n = \frac{2n^2}{3n^2+1}$.

7.1 Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. A sucessão é convergente?

7.2 A sucessão é limitada?

Formulário

Funções Exponenciais e Logarítmicas:

Para $a, b \in R_+$:

$$a^x a^y = a^{x+y} \;,\; \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \;,\; (ab)^x = a^x b^x \;,\; \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \;,\; (a^x)^y = a^{xy} .$$

Para $a \in R_+ \setminus \{1\}$:

$$\log_a(a^x) = x \quad , \quad a^{\log_a(x)} = x \quad , \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad , \quad \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad ,$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \;,\; \log_a(x)^y = y\log_a(x) \;,\; \log_a(a) = 1 \;,\; \log_a(1) = 0 \;.$$

Regras de Derivação:

$(k)' = 0; k \in R$, $(x)' = 1$, $(ku)' = ku', k \in R$, $(kx)' = k, k \in R$, $(au + b)' = au'; a, b \in R$

$(ax + b)' = a; a, b \in R$.

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \;,\; (uv)' = u'v + uv' \;,\; \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} .$$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'; n \in Q \setminus \{0\}$, $(x^n)' = nx^{n-1}; n \in Q \setminus \{0\}$.

$$(a^u)' = \ln(a)a^u u'; a \in R_+ \;,\; (e^u)' = e^u u' \;,\; (\log_a u)' = \frac{1}{\ln(a)}\frac{u'}{u}; a \in R_+ \setminus \{1\} \;,\; (\ln(u))' = \frac{u'}{u} .$$

$(sen(u))' = \cos(u)u'$, $(\cos(u))' = -sen(u)u'$, $(tg(u))' = \sec^2(u)u'$,

$(\cot g(u))' = -\operatorname{cosec}^2(u)u'$, $(\sec(u))' = tg(u)\sec(u)u'$,

$(\operatorname{cosec}(u))' = -\cot g(u)\operatorname{cosec}(u)u'$.

$$(arcsen(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad (\arccos(u))' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad (arctg(u))' = \frac{u'}{1+u^2} \quad ,$$

$$(arc\cot g(u))' = -\frac{u'}{1+u^2} .$$

Derivada da Função Composta:

Se g é função diferenciável em a e f é função diferenciável em $g(a)$, então $(fog)'(a) = f'(g(a))g'(a)$.

Derivada da Função Inversa:

Seja f uma função invertível. Se f é diferenciável em a e $f'(a) \neq 0$ então a função inversa $f^{-1}(x)$ é diferenciável em $b = f(a)$ e $\left(f^{-1}(b)\right)' = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Prova Específica de Matemática

Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h45m **Data:** 08 de Maio de 2015

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

---

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{2x^3 - 8x^2}{5 + x^2}$.

   (a) Determine os zeros de $f(x)$.

   (b) Esta função é injetiva? Justifique a sua resposta.

   (c) Resolva a inequação $f(x) \leq 0$.

2. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \log(x^2 + 1)$.

   (a) Determine o domínio de g.

   (b) Calcule a expressão da função 1ª derivada de g.

   (c) Mostre que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $x = 0$ é horizontal.

   (d) Averigue a existência de extremos locais de g.

   (e) Indique os intervalos de monotonia de g.

3. Considere a função real de variável real $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} & \text{se } x < 1 \\ k & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{sen(x-1)}{e^{x-1}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcule $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$.

   (b) Determine o valor da constante real k para a qual a função h é contínua em $x = 1$.

4. Um barbeiro pratica um preço de 8 euros por corte de cabelo e tem em média 120 clientes por semana. Pretende aumentar o preço do corte, muito embora saiba que irá perder 10 clientes por cada aumento x de 1 euro sobre o preço, com $x \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Qual é atualmente a faturação média semanal do barbeiro?

   (b) Assumindo que o barbeiro decide aumentar o preço do corte, determine as expressões das funções $C(x)$ e $P(x)$ que dão respetivamente o novo número de clientes e o novo preço do corte, em função de x.

   (c) Qual poderá ser o novo preço máximo cobrado, de forma a que o valor médio de faturação semanal não seja inferior ao atual.

Cotações (20 valores):

Questão 1	**1(a)**	**1(b)**	**1(c)**		
(4.50 valores)	1.50	1.25	1.75		
Questão 2	**2(a)**	**2(b)**	**2(c)**	**2(d)**	**2(e)**
(7.75 valores)	1.25	1.50	1.75	2.00	1.25
Questão 3	**3(a)**	**3(b)**			
(3.25 valores)	2.00	1.25			
Questão 4	**4(a)**	**4(b)**	**4(c)**		
(4.50 valores)	1.00	1.50	2.00		

Prova Específica de Matemática

Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h45m **Data:** 04 de Junho de 2015

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

---

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{3x^3 - 12x^2}{1+x^2}$.

   (a) Determine os zeros de $f(x)$.

   (b) Esta função é injetiva? Justifique a sua resposta.

   (c) Resolva a inequação $f(x) \geq 0$.

2. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \log(x^2+4)$.

   (a) Determine o domínio de g.

   (b) Calcule a expressão da função 1ª derivada de g.

   (c) Mostre que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $x = 0$ é horizontal.

   (d) Averigue a existência de extremos locais de g.

   (e) Indique os intervalos de monotonia de g.

3. Considere a função real de variável real $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{e^{x-2}} & \text{se } x < 2 \\ k & \text{se } x = 2 \\ \dfrac{x^2-4x+4}{x-2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcule $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$.

   (b) Determine o valor da constante real k para a qual a função h é contínua em $x = 2$.

4. Um barbeiro pratica um preço de 8 euros por corte de cabelo e tem em média 120 clientes por semana. Pretende aumentar o preço do corte, muito embora saiba que irá perder 10 clientes por cada aumento x de 1 euro sobre o preço, com $x \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Qual é atualmente a faturação média semanal do barbeiro?

   (b) Assumindo que o barbeiro decide aumentar o preço do corte, determine as expressões das funções $C(x)$ e $P(x)$ que dão respetivamente o novo número de clientes e o novo preço do corte, em função de x.

   (c) Qual poderá ser o novo preço máximo cobrado, de forma a que o valor médio de faturação semanal não seja inferior ao atual.

Cotações (20 valores):

Questão 1	1(a)	1(b)	1(c)		
(4.50 valores)	1.50	1.25	1.75		
Questão 2	2(a)	2(b)	2(c)	2(d)	2(e)
(7.75 valores)	1.25	1.50	1.75	2.00	1.25
Questão 3	3(a)	3(b)			
(3.25 valores)	2.00	1.25			
Questão 4	4(a)	4(b)	4(c)		
(4.50 valores)	1.00	1.50	2.00		

Prova Específica de Matemática
Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior
de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h45m **Data:** 04 de Maio de 2015

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

---

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2}$.
   (a) Determine os zeros de f.
   (b) Determine o domínio de f.
   (c) Quais são as coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica de f com o eixo das ordenadas.

2. Considere a função real de variável real $j(x) = |2x - 1|$
   (a) Escreva $j(x)$ como uma função definida por ramos.
   (b) Mostre analiticamente que a função j é contínua em $x = \frac{1}{2}$.

3. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
   (a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   (b) Determine a expressão da função 1ª derivada de g.
   (c) Indique os intervalos de monotonia e averigue a existência de extremos locais da função g.

4. Considere a função real de variável real definida por $h(x) = -sen(x) - \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, \pi]$.
   (a) Estude o sentido das concavidades e averigue a existência de pontos de inflexão da função h no seu domínio.
   (b) Mostre que a equação da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa $x = 0$ é $y = -x$.

5. A empresa de construção civil *Civilobras* pondera adquirir um terreno com capacidade construtiva para um máximo de 18 moradias. O custo de produção é dado por

$$c(x) = \ln(2x+1), \quad 0 \leq x \leq 18$$

em milhões de euros, sendo x o número de moradias construídas no terreno. Cada moradia seria posteriormente vendida pela empresa por 0.4 milhões de euros.

(a) Determine a expressão analítica que daria a receita da empresa, em milhões de euros, em função do número x de moradias vendidas.

(b) Considerando que o lucro da empresa é dado pela diferença entre a receita e o custo de produção, determine o número de moradias construídas e vendidas em relação ao qual a empresa tem lucro mínimo.

(c) A construção e venda do número de moradias obtido na alínea anterior garante lucro ou prejuízo à *Civilobras*? Justifique a sua resposta, quantificando o valor em causa (arredondado a uma casa decimal).

Cotações (20 valores):

Questão 1	1(a)	1(b)	1(c)
(4.00 valores)	1.50	1.50	1.00
Questão 2	2(a)	2(b)	
(3.00 valores)	1.50	1.50	
Questão 3	3(a)	3(b)	3(c)
(5.00 valores)	1.50	1.50	2.00
Questão 4	4(a)	4(b)	
(3.50 valores)	2.00	1.50	
Questão 5	5(a)	5(b)	5(c)
(4.50 valores)	1,00	2.00	1.50

ISCAC

Prova Específica de Matemática

Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h45m **Data:** 23 de Maio de 2016

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

---

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}}$.

   (a) Determine o domínio de f.

   (b) Encontre, caso existam, os valores reais de x que verificam $f(x) = 1$.

2. Considere a função real de variável real

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2+3} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{e^x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

   (a) Mostre que a função g não é contínua em $x = 0$.

   (b) Determine $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

   (c) Calcule, caso exista, $g'(1)$.

   (d) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $x = 1$.

3. Considere a função real $h(x) = \ln(x^2+1)$.

   (a) Determine o domínio de h.

   (b) Averigue a existência de extremos locais e indique os intervalos de monotonia de h.

   (c) Justifique convenientemente a afirmação "a função h tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[-1,1]$ ".

4. Considere as funções reais de variáveis reais definidas por

$$i(x) = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad j(x) = sen(x) + \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Defina a função $i \circ j$, apresentando a expressão analítica na sua forma mais simplifcada.

   (b) Calcule $(i \circ j)\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

---

5. A empresa de construção civil *Civilobras* pondera adquirir um terreno com capacidade construtiva para um máximo de 18 moradias. O custo de produção é dado por

$$c(x) = \ln(2x+1), \quad 0 \leq x \leq 18$$

em milhões de euros, sendo x o número de moradias construídas no terreno. Cada moradia seria posteriormente vendida pela empresa por 0.4 milhões de euros.

(a) Determine a expressão analítica que daria a receita da empresa, em milhões de euros, em função do número x de moradias vendidas.

(b) Considerando que o lucro da empresa é dado pela diferença entre a receita e o custo de produção, determine o número de moradias construídas e vendidas em relação ao qual a empresa tem lucro mínimo.

(c) A construção e venda do número de moradias obtido na alínea anterior garante lucro ou prejuízo à *Civilobras*? Justifique a sua resposta, quantificando o valor em causa (arredondado a uma casa decimal).

Cotações (20 valores):

Questão 1	**1(a)**	**1(b)**		
(3.00 valores)	1.50	1.50		
Questão 2	**2(a)**	**2(b)**	**2(c)**	**2(d)**
(6.00 valores)	1.50	1.50	1.50	1.50
Questão 3	**3(a)**	**3(b)**	**3(c)**	
(4.50 valores)	1.00	2.00	1.50	
Questão 4	**4(a)**	**4(b)**		
(2.00 valores)	1.00	1.00		
Questão 5	**5(a)**	**5(b)**	**5(c)**	
(4.50 valores)	1,00	2.00	1.50	