Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Coimbra

Prova Específica de Matemática

Destinada a Avaliar a Capacidade para a Frequência do Ensino Superior dos Maiores de 23 Anos

Duração: 2h **6 de Maio de 2011 - 18h**

Importante: Justifique todas as respostas, só assim poderá obter a classificação máxima.

QUESTÕES

1. Simplifique a seguinte expressão: $2\sqrt{64}-2\sqrt{12}+\sqrt[3]{\frac{21\times 7^{-1}}{3\times 2^{6}}}$

2. Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes equações e inequações:

   a. $-1=\frac{-3}{2}+\frac{1}{3x}$;

   b. $0\geq -3x^2-3x+18$;

   c. $|2-x|>1$.

3. Considere a função h, real de variável real, definida por: $h(x)=|2-x|$.
   a. Esboce o gráfico de h.
   b. Mostre que a função h atinge um mínimo em $x=2$.
   c. Resolva em IR a equação $h(x)=3$. Justifique que h não é uma função injectiva.

4. Considere a função f, real de variável real, definida por: $f(x)=1+\ 2e^{x-1}$.
   a. Determine o domínio e o contradomínio da função f.
   b. Resolva em IR a equação $f(x)=3$.
   c. Estude as concavidades da representação gráfica de f.

5. Considere a função g, real de variável real, definida por: $g(x)=log_e(3x-e^3)-3$.

   a. Determine o domínio e o contradomínio da função g.
   b. Calcule, caso existam, os zeros de g.

   c. Mostre que a função g é contínua em $x=\frac{2e^3}{3}$.

   d. Calcule, caso exista, o valor de $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$.

6. Calcule, caso existam, cada um dos seguintes limites:

a. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2-4x}{x^2-2x+1}\right)$; b. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^2-3x}{x}\right)$.

7. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{3n^2-3n}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$.

a. Mostre que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ e conclua sobre a convergência de (u_n).

b. Averigue se é limitada a sucessão de termo geral $v_n = cos\left(\frac{3n^2-3n}{n}\right)$, com $n \in \mathbb{N}$.

FORMULÁRIO

Funções exponenciais e logarítmicas

Propriedades: $a, b \in I\!R^+$

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $a^x b^x = (ab)^x$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
- $a^x = e^{x\log(a)}$

Propriedades: $a \in I\!R^+\backslash\{1\}$

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $a^{\log_a(x)} = x$
- $y\log_a(x) = \log_a(x^y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(a^x) = x$
- $\log_a(x) = \frac{1}{\log(a)} \cdot \log(x)$

Regras de derivação: $u = f(x)$; $v = g(x)$

- $(c)' = 0$, $c \in \mathbb{R}$
- $(cv)' = cv'$, $c \in \mathbb{R}$
- $(mx+b)' = m$, $m, b \in \mathbb{R}$
- $(x^p)' = px^{p-1}$, $p \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$
- $(u^p)' = pu^{p-1}u'$, $p \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(uv)' = u'v + v'u$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
- $(e^u)' = e^u u'$
- $(a^u)' = a^u u' \log(a)$, $a \in \mathbb{R}^+$
- $(\log_e(u))' = \frac{u'}{u}$
- $(\text{sen}(u))' = \cos(u)u'$
- $(\cos(u))' = -\text{sen}(u)u'$
- $(\text{tg}(u))' = \sec^2(u)u'$
- $(\text{cotg}(u))' = -\text{cosec}^2(u)u'$
- $(\text{arcsen}(u))' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
- $(\arccos(u))' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
- $(\text{arctg}(u))' = \frac{1}{1+u^2}u'$
- $(\text{arccotg}(u))' = -\frac{1}{1+u^2}u'$
- $(\text{cosec}(u))' = -\text{cosec}(u)\text{cotg}(u)u'$
- $(\sec(u))' = \sec(u)\text{tg}(u)u'$
- $(\log_b(u))' = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log(b)}$, $b \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

- Derivada da função composta: Se g é diferenciável em a e f é diferenciável em $g(a)$, então: $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

- Derivada da função inversa: Seja f invertível. Se f é diferenciável em a e $f'(a) \neq 0$, então: f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$ e $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Instituto superior de Contabilidade e Administração de Coimbra

Prova Específica de Matemática

Destinada a Avaliar a Capacidade para a Frequência do Ensino Superior dos Maiores de 23 Anos

7 de Maio de 2012

Início: 18h (Duração: 2h)

<u>Importante:</u> Justifique todas as respostas, só assim poderá obter a classificação completa.

---------------------- QUESTÕES ----------------------

1. Simplifique a seguinte expressão: $\sqrt[5]{-\left(\frac{5^{-1}\times 25}{5\times 2^5}\right)^{-2}}+2\sqrt{32}-2\sqrt{16}.$

2. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das seguintes equações e inequações:

   a. $-2=-\frac{6}{2}+\frac{2}{3x}$;   b. $0\geq -x^2-x+6$;   c. $|3-x|<1$.

3. Considere a função h, real de variável real, definida por: $h(x)=|3-x|$.

   a. Mostre que o gráfico de h atinge um mínimo em $x=3$.
   b. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $h(x)=1$. Justifique que h não é uma função injectiva.
   c. Esboce a representação gráfica de h.

4. Considere a função f, real de variável real, definida por: $f(x)=2e^{x-2}+2$.

   a. Determine o domínio e o contradomínio da função f.
   b. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $f(x)=4$.
   c. Estude a função quanto ao sentido das concavidades e esboce a sua representação gráfica.

5. Considere a função g, real de variável real, definida por: $g(x)=\log_e(2x-e^2)-2$.

   a. Determine o domínio e o contradomínio da função g.
   b. Calcule, caso existam, os zeros de g.
   c. Mostre que a função g é contínua em $x=e^2$.
   d. Calcule, caso exista, o valor de $\lim_{x\to-\infty} g'(x)$.

6. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

   a. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2x}{x^2-2x+1}$;

   b. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\frac{2}{3}x}$;

   c. $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} cos(2x)$.

Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Coimbra

Prova Específica de Matemática

Avaliação de Capacidade para a Frequência do Ensino Superior de Candidatos

Maiores de 23 Anos

16 de maio de 2014

Duração: 1h:45m

1 Efetue o cálculo da seguinte expressão: $\frac{2^5}{2^2}-\frac{3^2(3+\frac{1}{3})}{2}+10\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}\right)$.

2 Simplifique as seguintes expressões:

2.1 $7\sqrt{20}+6\sqrt{45}$.

2.2 $\ln\frac{\sqrt{x^5}}{y^3}$.

3 Encontre o conjunto solução da inequação $|x+1|\leq 3$.

4 Simplifique a seguinte expressão $\frac{x^2-4x+4}{2x-4}$.

5 Seja a função $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$.

5.1 Indique o domínio de $f(x)$.

5.2 Estude a paridade da função $f(x)$.

5.3 A função $f(x)$ é injetiva? Justifique.

5.4 Obtenha a primeira derivada de $f(x)$.

5.5 Estude a monotonia de $f(x)$.

5.6 Indique, caso existam, os extremos da função $f(x)$.

6 Seja a função $f(x)=\begin{cases} xe^{-x} \Leftarrow x<0 \\ 2 \Leftarrow x=0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x+2} \Leftarrow x>0 \end{cases}$.

6.1 Calcule, caso exista, $\lim_{x\to 0} f(x)$.

6.2 Averigúe se a função $f(x)$ é contínua no ponto $x=0$.

7 Considere a sucessão $U_n = \dfrac{2n^2}{3n^2 + 1}$.

7.1 Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. A sucessão é convergente?

7.2 A sucessão é limitada?

Formulário

Funções Exponenciais e Logarítmicas:

Para $a,b \in R_+$:

$$a^x a^y = a^{x+y} \;,\; \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \;,\; (ab)^x = a^x b^x \;,\; \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \;,\; (a^x)^y = a^{xy} .$$

Para $a \in R_+ \setminus \{1\}$:

$$\log_a(a^x) = x \quad , \quad a^{\log_a(x)} = x \quad , \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad , \quad \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad ,$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \;,\; \log_a(x)^y = y\log_a(x) \;,\; \log_a(a) = 1 \;,\; \log_a(1) = 0 \;.$$

Regras de Derivação:

$(k)' = 0; k \in R$, $(x)' = 1$, $(ku)' = ku', k \in R$, $(kx)' = k, k \in R$, $(au+b)' = au'; a,b \in R$

$(ax+b)' = a; a,b \in R$.

$(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(uv)' = u'v + uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$(u^n)' = nu^{n-1}u'; n \in Q \setminus \{0\}$, $(x^n)' = nx^{n-1}; n \in Q \setminus \{0\}$.

$(a^u)' = \ln(a)a^u u'; a \in R_+$, $(e^u)' = e^u u'$, $(\log_a u)' = \frac{1}{\ln(a)}\frac{u'}{u}; a \in R_+ \setminus \{1\}$, $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

$(sen(u))' = \cos(u)u'$, $(\cos(u))' = -sen(u)u'$, $(tg(u))' = \sec^2(u)u'$,

$(\cot g(u))' = -\operatorname{cos}ec^2(u)u'$, $(\sec(u))' = tg(u)\sec(u)u'$,

$(\operatorname{cos}ec(u))' = -\cot g(u)\operatorname{cos}ec(u)u'$.

$(arcsen(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $(\arccos(u))' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $(arctg(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$,

$(arc\cot g(u))' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

Derivada da Função Composta:

Se g é função diferenciável em a e f é função diferenciável em $g(a)$, então $(fog)'(a) = f'(g(a))g'(a)$.

Derivada da Função Inversa:

Seja f uma função invertível. Se f é diferenciável em a e $f'(a) \neq 0$ então a função inversa $f^{-1}(x)$ é diferenciável em $b = f(a)$ e $(f^{-1}(b))' = \frac{1}{f'(a)}$.

Prova Específica de Matemática

Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h45m **Data:** 08 de Maio de 2015

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

---

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{2x^3 - 8x^2}{5 + x^2}$.

   (a) Determine os zeros de $f(x)$.

   (b) Esta função é injetiva? Justifique a sua resposta.

   (c) Resolva a inequação $f(x) \leq 0$.

2. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \log(x^2 + 1)$.

   (a) Determine o domínio de g.

   (b) Calcule a expressão da função 1^a derivada de g.

   (c) Mostre que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $x = 0$ é horizontal.

   (d) Averigue a existência de extremos locais de g.

   (e) Indique os intervalos de monotonia de g.

3. Considere a função real de variável real $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} & \text{se } x < 1 \\ k & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{sen(x-1)}{e^{x-1}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcule $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$.

   (b) Determine o valor da constante real k para a qual a função h é contínua em $x = 1$.

4. Um barbeiro pratica um preço de 8 euros por corte de cabelo e tem em média 120 clientes por semana. Pretende aumentar o preço do corte, muito embora saiba que irá perder 10 clientes por cada aumento x de 1 euro sobre o preço, com $x \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Qual é atualmente a faturação média semanal do barbeiro?

   (b) Assumindo que o barbeiro decide aumentar o preço do corte, determine as expressões das funções $C(x)$ e $P(x)$ que dão respetivamente o novo número de clientes e o novo preço do corte, em função de x.

   (c) Qual poderá ser o novo preço máximo cobrado, de forma a que o valor médio de faturação semanal não seja inferior ao atual.

Cotações (20 valores):

Questão 1	1(a)	1(b)	1(c)		
(4.50 valores)	1.50	1.25	1.75		
Questão 2	2(a)	2(b)	2(c)	2(d)	2(e)
(7.75 valores)	1.25	1.50	1.75	2.00	1.25
Questão 3	3(a)	3(b)			
(3.25 valores)	2.00	1.25			
Questão 4	4(a)	4(b)	4(c)		
(4.50 valores)	1.00	1.50	2.00		

Prova Específica de Matemática

Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h45m

Data: 04 de Junho de 2015

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

---

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{3x^3 - 12x^2}{1+x^2}$.

   (a) Determine os zeros de $f(x)$.

   (b) Esta função é injetiva? Justifique a sua resposta.

   (c) Resolva a inequação $f(x) \geq 0$.

2. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \log(x^2+4)$.

   (a) Determine o domínio de g.

   (b) Calcule a expressão da função 1ª derivada de g.

   (c) Mostre que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $x = 0$ é horizontal.

   (d) Averigue a existência de extremos locais de g.

   (e) Indique os intervalos de monotonia de g.

3. Considere a função real de variável real $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{e^{x-2}} & \text{se } x < 2 \\ k & \text{se } x = 2 \\ \dfrac{x^2-4x+4}{x-2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcule $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$.

   (b) Determine o valor da constante real k para a qual a função h é contínua em $x = 2$.

4. Um barbeiro pratica um preço de 8 euros por corte de cabelo e tem em média 120 clientes por semana. Pretende aumentar o preço do corte, muito embora saiba que irá perder 10 clientes por cada aumento x de 1 euro sobre o preço, com $x \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Qual é atualmente a faturação média semanal do barbeiro?

   (b) Assumindo que o barbeiro decide aumentar o preço do corte, determine as expressões das funções $C(x)$ e $P(x)$ que dão respetivamente o novo número de clientes e o novo preço do corte, em função de x.

   (c) Qual poderá ser o novo preço máximo cobrado, de forma a que o valor médio de faturação semanal não seja inferior ao atual.

Cotações (20 valores):

Questão 1	1(a)	1(b)	1(c)		
(4.50 valores)	1.50	1.25	1.75		
Questão 2	2(a)	2(b)	2(c)	2(d)	2(e)
(7.75 valores)	1.25	1.50	1.75	2.00	1.25
Questão 3	3(a)	3(b)			
(3.25 valores)	2.00	1.25			
Questão 4	4(a)	4(b)	4(c)		
(4.50 valores)	1.00	1.50	2.00		

Prova Específica de Matemática

Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior de Candidatos Maiores de 23 Anos

ISCAC

Duração: 1h45m

Data: 04 de Maio de 2015

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

---

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2}$.

   (a) Determine os zeros de f.

   (b) Determine o domínio de f.

   (c) Quais são as coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica de f com o eixo das ordenadas.

2. Considere a função real de variável real $j(x) = |2x - 1|$

   (a) Escreva $j(x)$ como uma função definida por ramos.

   (b) Mostre analiticamente que a função j é contínua em $x = \frac{1}{2}$.

3. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

   (b) Determine a expressão da função 1ª derivada de g.

   (c) Indique os intervalos de monotonia e averigue a existência de extremos locais da função g.

4. Considere a função real de variável real definida por $h(x) = -sen(x) - \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, \pi]$.

   (a) Estude o sentido das concavidades e averigue a existência de pontos de inflexão da função h no seu domínio.

   (b) Mostre que a equação da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa $x = 0$ é $y = -x$.

5. A empresa de construção civil *Civilobras* pondera adquirir um terreno com capacidade construtiva para um máximo de 18 moradias. O custo de produção é dado por

$$c(x) = \ln(2x+1), \quad 0 \leq x \leq 18$$

em milhões de euros, sendo x o número de moradias construídas no terreno. Cada moradia seria posteriormente vendida pela empresa por 0.4 milhões de euros.

(a) Determine a expressão analítica que daria a receita da empresa, em milhões de euros, em função do número x de moradias vendidas.

(b) Considerando que o lucro da empresa é dado pela diferença entre a receita e o custo de produção, determine o número de moradias construídas e vendidas em relação ao qual a empresa tem lucro mínimo.

(c) A construção e venda do número de moradias obtido na alínea anterior garante lucro ou prejuízo à *Civilobras*? Justifique a sua resposta, quantificando o valor em causa (arredondado a uma casa decimal).

Cotações (20 valores):

Questão 1	**1(a)**	**1(b)**	**1(c)**
(4.00 valores)	1.50	1.50	1.00
Questão 2	**2(a)**	**2(b)**	
(3.00 valores)	1.50	1.50	
Questão 3	**3(a)**	**3(b)**	**3(c)**
(5.00 valores)	1.50	1.50	2.00
Questão 4	**4(a)**	**4(b)**	
(3.50 valores)	2.00	1.50	
Questão 5	**5(a)**	**5(b)**	**5(c)**
(4.50 valores)	1,00	2.00	1.50

Prova Específica de Matemática

Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h45m **Data:** 23 de Maio de 2016

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}}$.

   (a) Determine o domínio de f.

   (b) Encontre, caso existam, os valores reais de x que verificam $f(x) = 1$.

2. Considere a função real de variável real

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2+3} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{e^x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

   (a) Mostre que a função g não é contínua em $x = 0$.

   (b) Determine $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

   (c) Calcule, caso exista, $g'(1)$.

   (d) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $x = 1$.

3. Considere a função real $h(x) = \ln(x^2+1)$.

   (a) Determine o domínio de h.

   (b) Averigue a existência de extremos locais e indique os intervalos de monotonia de h.

   (c) Justifique convenientemente a afirmação "a função h tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[-1, 1]$ ".

4. Considere as funções reais de variáveis reais definidas por

$$i(x) = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad j(x) = sen(x) + \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Defina a função $i \circ j$, apresentando a expressão analítica na sua forma mais simplifcada.

   (b) Calcule $(i \circ j)\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

5. A empresa de construção civil *Civilobras* pondera adquirir um terreno com capacidade construtiva para um máximo de 18 moradias. O custo de produção é dado por

$$c(x) = \ln(2x + 1), \quad 0 \leq x \leq 18$$

em milhões de euros, sendo x o número de moradias construídas no terreno. Cada moradia seria posteriormente vendida pela empresa por 0.4 milhões de euros.

(a) Determine a expressão analítica que daria a receita da empresa, em milhões de euros, em função do número x de moradias vendidas.

(b) Considerando que o lucro da empresa é dado pela diferença entre a receita e o custo de produção, determine o número de moradias construídas e vendidas em relação ao qual a empresa tem lucro mínimo.

(c) A construção e venda do número de moradias obtido na alínea anterior garante lucro ou prejuízo à *Civilobras*? Justifique a sua resposta, quantificando o valor em causa (arredondado a uma casa decimal).

Cotações (20 valores):

Questão 1	1(a)	1(b)		
(3.00 valores)	1.50	1.50		
Questão 2	2(a)	2(b)	2(c)	2(d)
(6.00 valores)	1.50	1.50	1.50	1.50
Questão 3	3(a)	3(b)	3(c)	
(4.50 valores)	1.00	2.00	1.50	
Questão 4	4(a)	4(b)		
(2.00 valores)	1.00	1.00		
Questão 5	5(a)	5(b)	5(c)	
(4.50 valores)	1,00	2.00	1.50	