



Prova Específica de Matemática
Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior
de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h30m

Data: 8 de julho de 2020

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

- Cotações:

Questões	1(a)	1(b)	1(c)	2(a)	2(b)	2(c)	3(a)	3(b)
20 valores	2.00	2.50	2.50	1.75	3.00	2.50	2.75	3.00

1. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x + ax + a & \text{se } x < 0 \\ \ln(x+1) + a + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

- (a) Mostre que a função f é contínua em $x = 0$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Nas duas alíneas seguintes considere $a = 0$.

- (b) Calcule, caso exista, $f'(0)$.

- (c) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = e - 1$.

2. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \ln(e^{2x} - \frac{1}{2})$.

- (a) Determine o domínio da função g .

- (b) Mostre que a função g não possui pontos de inflexão.

- (c) Sendo g uma função injetiva, caracterize a sua função inversa g^{-1} .

3. Um medicamento foi administrado a uma pessoa às 10h da manhã de um determinado dia.

A concentração desse medicamento, em miligramas por litro de sangue, t horas após ter sido administrado, é dada, para determinado valor de K , por $C(t) = 10(e^{-Kt} - e^{-0.4t})$, $t \geq 0$.

- (a) Sabendo que $2e^{-0.4t} - 0.2C(t) = C'(t)$, mostre que $K = 0.2$.

- (b) Assumindo $K = 0.2$, determine o valor de t para o qual é máxima a concentração do medicamento no sangue da pessoa.

FORMULÁRIO de MATEMÁTICA

• Funções exponenciais e logarítmicas (no domínio de cada uma das funções)

Propriedades: $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$\bullet a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\bullet a^x b^x = (ab)^x$$

$$\bullet \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\bullet \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\bullet (a^x)^y = a^{xy}$$

$$\bullet a^x = e^{x \log(a)}$$

Propriedades: $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$\bullet \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\bullet \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\bullet y \log_a(x) = \log_a(x^y)$$

$$\bullet \log_a(x) = \frac{1}{\log(a)} \cdot \log(x)$$

$$\bullet a^{\log_a(x)} = x$$

$$\bullet \log_a(a^x) = x$$

• Funções trigonométricas

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.
$\operatorname{cotg}(\alpha)$	n.d.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

• Fórmulas trigonométricas

$$1) \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$3) \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$5) \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$7) \cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$2) \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$4) \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$6) \sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

• Regras de derivação: Sejam u e v funções reais de uma mesma variável real.

$$1) (c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$3) (cv)' = cv', \quad c \in \mathbb{R}$$

$$5) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$7) (e^u)' = e^u u'$$

$$9) (\log(u))' = \frac{u'}{u}$$

$$11) (\sin(u))' = \cos(u) u'$$

$$13) (\operatorname{tg}(u))' = \sec^2(u) u'$$

$$2) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$4) (uv)' = u'v + v'u$$

$$6) (u^p)' = pu^{p-1}u', \quad p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$8) (a^u)' = a^u u' \log(a), \quad a \in \mathbb{R}^+$$

$$10) (\log_b(u))' = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log(b)}, \quad b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$12) (\cos(u))' = -\sin(u) u'$$

$$14) (\operatorname{cotg}(u))' = -\operatorname{cosec}^2(u) u'$$



Prova Específica de Matemática
Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior
de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h30m

Data: 13 de Maio de 2019

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.

- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

- Cotações:

Questões	1(a)	1(b)	1(c)	2	3(a)	3(b)	3(c)	4
20 valores	2.00	2.50	2.00	2.50	1.00	3.50	3.50	3.00

1. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{e^{2x} - 4}{x^2 - 4}$.

(a) Determine o domínio de f .

(b) Determine as coordenadas dos pontos de intersecção da representação gráfica de f com os eixos coordenados.

(c) Calcule, caso exista, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Seja $f(x) = -4x + \sin(\pi x)$. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, -1)$.

3. De uma função f , real de variável real, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabemos que $f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{x}$, com $x \in \mathbb{R}^+$.

(a) Calcule a variação instantânea de f quando $x = 1$.

(b) Determine os intervalos de monotonia e os extremantes de f .

(c) Determine as abcissas dos pontos de inflexão e o sentido das concavidades de f .

4. Os custos fixos de uma empresa são 2000€. O custo de produção unitário de um bem é 20€. Se o preço de venda unitário desse bem for 75€, quantas unidades deverão ser produzidas e vendidas para a empresa obter 14500€ de lucro.



Prova Específica de Matemática
Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior
de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h30m

Data: 17 de Maio de 2018

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.
- Cotações:

Questões	1(a)	1(b)	1(c)	2(a)	2(b)	2(c)	3
20 valores	3.00	2.00	3.00	2.00	3.00	3.00	4.00

1. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(kx)}{kx} & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- (a) Calcule, caso exista, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- (b) Indique, justificando, o valor de k para o qual a função f é contínua em $\mathbb{R}$.
- (c) Para o valor de k encontrado na alínea anterior, determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = \pi$.

2. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \ln(x^2) + \frac{1}{x}$.

- (a) Calcule o domínio da função g .
- (b) Determine os extremos locais e os intervalos de monotonia de g .
- (c) Estude o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão de g .

3. Uma empresa encontra-se a testar um fungicida que pretende lançar no mercado.

Sob a ação deste produto, a área (em m^2) ocupada por uma colónia de fungos, t dias após a sua aplicação, é dada por:

$$a(t) = 60 - t^2 e^{-0.1t}, \quad \text{com } t \geq 0.$$

Ao fim de quantos dias a área ocupada pela colónia de fungos é mínima?



Prova Específica de Matemática
Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior
de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h30m

Data: 15 de Junho de 2018

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.
- Cotações:

Questões	1(a)	1(b)	2(a)	2(b)	3(a)	3(b)	3(c)	3(d)
20 valores	2.00	2.00	3.00	3.00	1.50	3.00	2.50	3.00

1. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{se } x > 0 \\ x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

(a) Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

(b) Indique, justificando devidamente, o domínio de continuidade de f .

2. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \frac{x}{e^x}$.

(a) Determine a equação reduzida da reta tangente à representação gráfica de g no ponto de abscissa $x = 0$.

(b) Averigüe a existência de pontos de inflexão de g .

3. Numa empresa a relação entre os lucros trimestrais $L(x)$ e o investimento x em publicidade é dada por

$$L(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 7x + 30, \quad 0 \leq x \leq 60$$

com x e $L(x)$ em milhares de euros.

(a) Diga se a empresa terá lucro, e qual, se não investir em publicidade.

(b) Diga quanto se deve investir em publicidade para que o lucro seja máximo e indique o seu valor máximo.

(c) Diga, justificando, se algum outro valor investido em publicidade origina o mesmo lucro quem em (a).

(d) Esboce o gráfico da função $L(x)$, indicando no mesmo as respostas de (a) e (b).

Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Coimbra

Prova Específica de Matemática

Destinada a Avaliar a Capacidade para a Frequência do Ensino Superior dos Maiores de 23 Anos

Duração: 2h

6 de Maio de 2011 - 18h

Importante: Justifique todas as respostas. só assim poderá obter a classificação máxima.

QUESTÕES

1. Simplifique a seguinte expressão: $2\sqrt{64} - 2\sqrt{12} + \sqrt[3]{\frac{21 \times 7^{-1}}{3 \times 2^6}}$
2. Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes equações e inequações:
 - a. $-1 = \frac{-3}{2} + \frac{1}{3x}$;
 - b. $0 \geq -3x^2 - 3x + 18$;
 - c. $|2 - x| > 1$.
3. Considere a função h , real de variável real, definida por: $h(x) = |2 - x|$.
 - a. Esboce o gráfico de h .
 - b. Mostre que a função h atinge um mínimo em $x=2$.
 - c. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $h(x)=3$. Justifique que h não é uma função injectiva.
4. Considere a função f , real de variável real, definida por: $f(x) = 1 + 2e^{x-1}$.
 - a. Determine o domínio e o contradomínio da função f .
 - b. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $f(x)=3$.
 - c. Estude as concavidades da representação gráfica de f .
5. Considere a função g , real de variável real, definida por: $g(x) = \log_n(3x - e^3) - 3$.
 - a. Determine o domínio e o contradomínio da função g .
 - b. Calcule, caso existam, os zeros de g .
 - c. Mostre que a função g é contínua em $x = \frac{2e^3}{3}$.
 - d. Calcule, caso exista, o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x)$.

6. Calcule, caso existam, cada um dos seguintes limites:

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^2 - 4x}{x^2 - 2x + 1} \right)$; b. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^2 - 3x}{x} \right)$

7. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{3n^2 - 3n}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$.

a. Mostre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ e conclua sobre a convergência de (u_n) .

b. Averigue se é limitada a sucessão de termo geral $v_n = \cos\left(\frac{3n^2 - 3n}{n}\right)$, com $n \in \mathbb{N}$.

FORMULÁRIO

Funções exponenciais e logarítmicas

Propriedades: $a, b \in \mathbb{R}^+$

• $a^x a^y = a^{x+y}$

• $a^x b^x = (ab)^x$

• $(a^x)^y = a^{xy}$

• $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

• $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

• $a^x = e^{x \log(a)}$

Propriedades: $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

• $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

• $a^{\log_a(x)} = x$

• $y \log_a(x) = \log_a(x^y)$

• $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

• $\log_a(a^x) = x$

• $\log_a(x) = \frac{1}{\log(a)} \cdot \log(x)$

Regras de derivação: $u = f(x)$; $v = g(x)$

• $(c)' = 0$, $c \in \mathbb{R}$

• $(\sin(u))' = \cos(u)u'$

• $(cv)' = cu'$, $c \in \mathbb{R}$

• $(\cos(u))' = -\sin(u)u'$

• $(mx + b)' = m$, $m, b \in \mathbb{R}$

• $(\lg(u))' = \frac{1}{u} u'$

• $(x^p)' = px^{p-1}$, $p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

• $(\cotg(u))' = -\operatorname{cosec}^2(u)u'$

• $(u^p)' = pu^{p-1}u'$, $p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

• $(\arcsen(u))' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$

• $(u \pm v)' = u' \pm v'$

• $(\arccos(u))' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$

• $(uv)' = u'v + v'u$

• $(\arctg(u))' = \frac{1}{1+u^2} u'$

• $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

• $(\operatorname{arccotg}(u))' = -\frac{1}{1+u^2} u'$

• $(e^u)' = e^u u'$

• $(\operatorname{cosec}(u))' = -\operatorname{cosec}(u)\cotg(u)u'$

• $(a^u)' = a^u u' \log(a)$, $a \in \mathbb{R}^+$

• $(\sec(u))' = \sec(u)\tg(u)u'$

• $(\log_c(u))' = \frac{u'}{u \log(c)}$

• $(\log_b(u))' = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log(b)}$, $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

• Derivada da função composta: Se g é diferenciável em a e f é diferenciável em $g(a)$, então: $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

• Derivada da função Inversa: Seja f invertível. Se f é diferenciável em a e $f'(a) \neq 0$, então: f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$ e $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Instituto superior de Contabilidade e Administração de Coimbra

Prova Específica de Matemática

Destinada a Avaliar a Capacidade para a Frequência do Ensino Superior dos Maiores de 23 Anos

7 de Maio de 2012

Início: 18h (Duração: 2h)

Importante: Justifique todas as respostas, só assim poderá obter a classificação completa.

QUESTÕES

1. Simplifique a seguinte expressão:
$$\sqrt[5]{-\left(\frac{5^{-1} \times 25}{5^2 \times 2^5}\right)^{-2}} + 2\sqrt{32} - 2\sqrt{16}.$$
2. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das seguintes equações e inequações:
 - a. $-2 = -\frac{6}{2} + \frac{2}{3x};$
 - b. $0 \geq -x^2 - x + 6;$
 - c. $|3 - x| < 1.$
3. Considere a função h , real de variável real, definida por: $h(x) = |3 - x|.$
 - a. Mostre que o gráfico de h atinge um mínimo em $x=3$.
 - b. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $h(x)=1$. Justifique que h não é uma função injectiva.
 - c. Esboce a representação gráfica de h .
4. Considere a função f , real de variável real, definida por: $f(x) = 2e^{x-2} + 2.$
 - a. Determine o domínio e o contradomínio da função f .
 - b. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $f(x)=4$.
 - c. Estude a função quanto ao sentido das concavidades e esboce a sua representação gráfica.
5. Considere a função g , real de variável real, definida por: $g(x) = \log_e(2x - e^2) - 2.$
 - a. Determine o domínio e o contradomínio da função g .
 - b. Calcule, caso existam, os zeros de g .
 - c. Mostre que a função g é contínua em $x=e^2$.
 - d. Calcule, caso exista, o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x)$.
6. Calcule, caso existam, os seguintes limites:
 - a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x}{x^2 - 2x + 1};$
 - b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{\frac{2}{3}x};$
 - c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(2x).$

Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Coimbra

Prova Específica de Matemática

Avaliação de Capacidade para a Frequência do Ensino Superior de Candidatos

Maiores de 23 Anos

16 de maio de 2014

Duração: 1h:45m

1 Efetue o cálculo da seguinte expressão: $\frac{2^5}{2^2} - \frac{3^2(3 + \frac{1}{3})}{2} + 10 \left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}} \right)$.

2 Simplifique as seguintes expressões:

2.1 $7\sqrt{20} + 6\sqrt{45}$.

2.2 $\ln \frac{\sqrt{x^5}}{y^3}$.

3 Encontre o conjunto solução da inequação $|x+1| \leq 3$.

4 Simplifique a seguinte expressão $\frac{x^2 - 4x + 4}{2x - 4}$.

5 Seja a função $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

5.1 Indique o domínio de $f(x)$.

5.2 Estude a paridade da função $f(x)$.

5.3 A função $f(x)$ é injetiva? Justifique.

5.4 Obtenha a primeira derivada de $f(x)$.

5.5 Estude a monotonia de $f(x)$.

5.6 Indique, caso existam, os extremos da função $f(x)$.

6 Seja a função $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \Leftarrow x < 0 \\ 2 & \Leftarrow x = 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x+2} & \Leftarrow x > 0 \end{cases}$.

6.1 Calcule, caso exista, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

6.2 Averigüe se a função $f(x)$ é contínua no ponto $x = 0$.

7 Considere a sucessão $U_n = \frac{2n^2}{3n^2 + 1}$.

7.1 Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. A sucessão é convergente?

7.2 A sucessão é limitada?

Formulário

Funções Exponenciais e Logarítmicas:

Para $a, b \in R_+$:

$$a^x a^y = a^{x+y}, \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, (ab)^x = a^x b^x, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, (a^x)^y = a^{xy}.$$

Para $a \in R_+ \setminus \{1\}$:

$$\log_a(a^x) = x, a^{\log_a(x)} = x, \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \log_a(x)^y = y \log_a(x), \log_a(a) = 1, \log_a(1) = 0.$$

Regras de Derivação:

$$(k)' = 0; k \in R, (x)' = 1, (ku)' = ku', k \in R, (kx)' = k, k \in R, (au + b)' = au'; a, b \in R$$

$$(ax + b)' = a; a, b \in R.$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v', (uv)' = u'v + uv', \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'; n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, (x^n)' = nx^{n-1}; n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

$$(a^u)' = \ln(a)a^u u'; a \in R_+, (e^u)' = e^u u', (\log_a u)' = \frac{1}{\ln(a)} \frac{u'}{u}; a \in R_+ \setminus \{1\}, (\ln(u))' = \frac{u'}{u}.$$

$$(\operatorname{sen}(u))' = \cos(u)u', (\cos(u))' = -\operatorname{sen}(u)u', (\operatorname{tg}(u))' = \sec^2(u)u',$$

$$(\cot g(u))' = -\operatorname{cosec}^2(u)u', (\sec(u))' = \operatorname{tg}(u)\sec(u)u',$$

$$(\operatorname{cosec}(u))' = -\cot g(u)\operatorname{cosec}(u)u'.$$

$$(\operatorname{arcsen}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, (\arccos(u))' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, (\operatorname{arctg}(u))' = \frac{u'}{1+u^2},$$

$$(\operatorname{arc cot} g(u))' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Derivada da Função Composta:

Se g é função diferenciável em a e f é função diferenciável em $g(a)$, então

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Derivada da Função Inversa:

Seja f uma função invertível. Se f é diferenciável em a e $f'(a) \neq 0$ então a função

$$\text{inversa } f^{-1}(x) \text{ é diferenciável em } b = f(a) \text{ e } (f^{-1}(b))' = \frac{1}{f'(a)}.$$



Prova Específica de Matemática
Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior
de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h45m

Data: 08 de Maio de 2015

-
- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
 - Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.
-

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{2x^3 - 8x^2}{5 + x^2}$.

- (a) Determine os zeros de $f(x)$.
- (b) Esta função é injetiva? Justifique a sua resposta.
- (c) Resolva a inequação $f(x) \leq 0$.

2. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \log(x^2 + 1)$.

- (a) Determine o domínio de g .
- (b) Calcule a expressão da função 1ª derivada de g .
- (c) Mostre que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa $x = 0$ é horizontal.
- (d) Averigue a existência de extremos locais de g .
- (e) Indique os intervalos de monotonia de g .

3. Considere a função real de variável real $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} & \text{se } x < 1 \\ k & \text{se } x = 1 \\ \frac{\sin(x - 1)}{e^{x-1}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

- (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$.
- (b) Determine o valor da constante real k para a qual a função h é contínua em $x = 1$.

4. Um barbeiro pratica um preço de 8 euros por corte de cabelo e tem em média 120 clientes por semana. Pretende aumentar o preço do corte, muito embora saiba que irá perder 10 clientes por cada aumento x de 1 euro sobre o preço, com $x \in \mathbb{R}^+$.
- Qual é atualmente a faturação média semanal do barbeiro?
 - Assumindo que o barbeiro decide aumentar o preço do corte, determine as expressões das funções $C(x)$ e $P(x)$ que dão respetivamente o novo número de clientes e o novo preço do corte, em função de x .
 - Qual poderá ser o novo preço máximo cobrado, de forma a que o valor médio de faturação semanal não seja inferior ao atual.

Cotações (20 valores):

Questão 1	1(a)	1(b)	1(c)		
(4.50 valores)	1.50	1.25	1.75		
Questão 2	2(a)	2(b)	2(c)	2(d)	2(e)
(7.75 valores)	1.25	1.50	1.75	2.00	1.25
Questão 3	3(a)	3(b)			
(3.25 valores)	2.00	1.25			
Questão 4	4(a)	4(b)	4(c)		
(4.50 valores)	1.00	1.50	2.00		



Prova Específica de Matemática
Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior
de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h45m

Data: 04 de Junho de 2015

- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
- Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{3x^3 - 12x^2}{1 + x^2}$.

- (a) Determine os zeros de $f(x)$.
- (b) Esta função é injetiva? Justifique a sua resposta.
- (c) Resolva a inequação $f(x) \geq 0$.

2. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \log(x^2 + 4)$.

- (a) Determine o domínio de g .
- (b) Calcule a expressão da função 1ª derivada de g .
- (c) Mostre que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa $x = 0$ é horizontal.
- (d) Averigue a existência de extremos locais de g .
- (e) Indique os intervalos de monotonia de g .

3. Considere a função real de variável real $h(x) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{e^{x-2}} & \text{se } x < 2 \\ k & \text{se } x = 2, \quad k \in \mathbb{R}. \\ \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

- (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.
- (b) Determine o valor da constante real k para a qual a função h é contínua em $x = 2$.

4. Um barbeiro pratica um preço de 8 euros por corte de cabelo e tem em média 120 clientes por semana. Pretende aumentar o preço do corte, muito embora saiba que irá perder 10 clientes por cada aumento x de 1 euro sobre o preço, com $x \in \mathbb{R}^+$.
- Qual é atualmente a faturação média semanal do barbeiro?
 - Assumindo que o barbeiro decide aumentar o preço do corte, determine as expressões das funções $C(x)$ e $P(x)$ que dão respetivamente o novo número de clientes e o novo preço do corte, em função de x .
 - Qual poderá ser o novo preço máximo cobrado, de forma a que o valor médio de faturação semanal não seja inferior ao atual.

Cotações (20 valores):

Questão 1	1(a)	1(b)	1(c)		
(4.50 valores)	1.50	1.25	1.75		
Questão 2	2(a)	2(b)	2(c)	2(d)	2(e)
(7.75 valores)	1.25	1.50	1.75	2.00	1.25
Questão 3	3(a)	3(b)			
(3.25 valores)	2.00	1.25			
Questão 4	4(a)	4(b)	4(c)		
(4.50 valores)	1.00	1.50	2.00		



Prova Específica de Matemática
Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior
de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h45m

Data: 04 de Maio de 2015

-
- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
 - Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.
-

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2}$.
 - (a) Determine os zeros de f .
 - (b) Determine o domínio de f .
 - (c) Quais são as coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica de f com o eixo das ordenadas.
2. Considere a função real de variável real $j(x) = |2x - 1|$.
 - (a) Escreva $j(x)$ como uma função definida por ramos.
 - (b) Mostre analiticamente que a função j é contínua em $x = \frac{1}{2}$.
3. Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
 - (b) Determine a expressão da função 1ª derivada de g .
 - (c) Indique os intervalos de monotonia e averigue a existência de extremos locais da função g .
4. Considere a função real de variável real definida por $h(x) = -\sin(x) - \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, \pi]$.
 - (a) Estude o sentido das concavidades e averigue a existência de pontos de inflexão da função h no seu domínio.
 - (b) Mostre que a equação da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa $x = 0$ é $y = -x$.

5. A empresa de construção civil *Civilobras* pondera adquirir um terreno com capacidade construtiva para um máximo de 18 moradias. O custo de produção é dado por

$$c(x) = \ln(2x + 1), \quad 0 \leq x \leq 18$$

em milhões de euros, sendo x o número de moradias construídas no terreno. Cada moradia seria posteriormente vendida pela empresa por 0.4 milhões de euros.

- Determine a expressão analítica que daria a receita da empresa, em milhões de euros, em função do número x de moradias vendidas.
- Considerando que o lucro da empresa é dado pela diferença entre a receita e o custo de produção, determine o número de moradias construídas e vendidas em relação ao qual a empresa tem lucro mínimo.
- A construção e venda do número de moradias obtido na alínea anterior garante lucro ou prejuízo à *Civilobras*? Justifique a sua resposta, quantificando o valor em causa (arredondado a uma casa decimal).

Cotações (20 valores):

Questão 1	1(a)	1(b)	1(c)
(4.00 valores)	1.50	1.50	1.00
Questão 2	2(a)	2(b)	
(3.00 valores)	1.50	1.50	
Questão 3	3(a)	3(b)	3(c)
(5.00 valores)	1.50	1.50	2.00
Questão 4	4(a)	4(b)	
(3.50 valores)	2.00	1.50	
Questão 5	5(a)	5(b)	5(c)
(4.50 valores)	1.00	2.00	1.50



Prova Específica de Matemática
Avaliação da Capacidade para a Frequência do Ensino Superior
de Candidatos Maiores de 23 Anos

Duração: 1h45m

Data: 23 de Maio de 2016

-
- Não é permitido o uso de material de consulta. Apenas é permitido o uso de calculadoras científicas.
 - Responda a cada questão, apresentando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.
-

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}}$.

- (a) Determine o domínio de f .
- (b) Encontre, caso existam, os valores reais de x que verificam $f(x) = 1$.

2. Considere a função real de variável real

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+3} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{e^x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

- (a) Mostre que a função g não é contínua em $x = 0$.
- (b) Determine $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- (c) Calcule, caso exista, $g'(1)$.
- (d) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa $x = 1$.

3. Considere a função real $h(x) = \ln(x^2 + 1)$.

- (a) Determine o domínio de h .
- (b) Averigue a existência de extremos locais e indique os intervalos de monotonia de h .
- (c) Justifique convenientemente a afirmação "a função h tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[-1, 1]$ ".

4. Considere as funções reais de variáveis reais definidas por

$$i(x) = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad j(x) = \sin(x) + \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Defina a função $i \circ j$, apresentando a expressão analítica na sua forma mais simplificada.
- (b) Calcule $(i \circ j)\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

5. A empresa de construção civil *Civilobras* pondera adquirir um terreno com capacidade construtiva para um máximo de 18 moradias. O custo de produção é dado por

$$c(x) = \ln(2x + 1), \quad 0 \leq x \leq 18$$

em milhões de euros, sendo x o número de moradias construídas no terreno. Cada moradia seria posteriormente vendida pela empresa por 0.4 milhões de euros.

- Determine a expressão analítica que daria a receita da empresa, em milhões de euros, em função do número x de moradias vendidas.
- Considerando que o lucro da empresa é dado pela diferença entre a receita e o custo de produção, determine o número de moradias construídas e vendidas em relação ao qual a empresa tem lucro mínimo.
- A construção e venda do número de moradias obtido na alínea anterior garante lucro ou prejuízo à *Civilobras*? Justifique a sua resposta, quantificando o valor em causa (arredondado a uma casa decimal).

Cotações (20 valores):

Questão 1	1(a)	1(b)		
(3.00 valores)	1.50	1.50		
Questão 2	2(a)	2(b)	2(c)	2(d)
(6.00 valores)	1.50	1.50	1.50	1.50
Questão 3	3(a)	3(b)	3(c)	
(4.50 valores)	1.00	2.00	1.50	
Questão 4	4(a)	4(b)		
(2.00 valores)	1.00	1.00		
Questão 5	5(a)	5(b)	5(c)	
(4.50 valores)	1.00	2.00	1.50	